SNE 34; Murcia, Octubre 2008

VARIANZA DE LA MEDIDA DE NEUTRONES CON FUENTE DE ESPALACIÓN

A. García-Berrocal , J. Blázquez*, M. Balbás, C. Montalvo
*División de Fisión, Ciemat, Madrid
Grupo de Investigación AMERPREM,
ETSI de Minas, Universidad Politécnica de Madrid (UPM)
e-mail: agustin.garciaberrocal@upm.es

INTRODUCCION

Cuando un protón de energía superior a 1000 MeV incide sobre un blanco de masa atómica elevada, típicamente plomo, se produce el fenómeno de la espalación. La longitud de onda de De Broglie del protón es mucho más pequeña que el tamaño del núcleo, de manera que éste no ve al núcleo sino a los nucleones. El protón cede su energía en varios choques arrancando nucleones. Los neutrones emitidos se denominan neutrones de espalación.

Aumentando la energía de los protones y la intensidad del haz con un acelerador, se consiguen fuentes muy intensas de neutrones rápidos(1). Las fuentes de espalación son componentes básicos de un ADS(2) para mantener un alto flujo neutrónico en el reactor subcrítico; pero también se pueden emplear en otras muchas aplicaciones, tales como prueba de materiales, medicina, etc.

A diferencia con las tradicionales fuentes radiactivas (α,n) no siguen la estadística de Poisson(1),(3), La razón fundamental de la diferencia es la multiplicidad de neutrones por cada protón acelerado. Por tanto, en el proceso de medida con contadores de neutrones, no se cumple la famosa relación ‘varianza/media = 1’. Esta relación debe ser corregida para asignar incertidumbres a las medidas.

La solución de la ecuación de Fokker-Planck(4) es la función generadora de momentos del proceso aleatorio asociado a la espalación. Calculando la relación entre los momentos de orden 2 y orden 1 en función de la multiplicidad de neutrones, se obtiene la corrección a la relación de Poisson para la varianza.

En general, la distribución de probabilidades del número de neutrones emitidos por protón depende del material del blanco, geometría y energía del protón incidente. La ecuación de Fokker-Planck no requiere su conocimiento explícito, aunque si hace falta para estimar el factor de cobertura de la desviación típica. Con ideas básicas de la Física Nuclear se puede demostrar que la distribución de probabilidades es esencialmente asimétrica, por lo que, en rigor, se requiere un intervalo de confianza más bien que un factor de cobertura. Afortunadamente, el teorema de Chebyshev(3) acota el nivel de incertidumbre.

Las medidas experimentales[5] confirman los cálculos básicos relativos al número medio de neutrones emitidos por protón. Las medidas de la distribución de probabilidad son, sin embargo, específicas de cada situación; lo que, en este trabajo, se considera en la discusión de resultados. En la práctica, la corrección a la varianza por causa de la multiplicidad es suficiente para estimar la incertidumbre en muchos casos.

CONSIDERACIONES PRELIMINARES

El blanco de espalación debe tener un Z alto, facilidad de mecanización y punto de fusión elevado. Candidatos típicos son Pb, Hg, W, La. En caso de mecanización en forma de cilindro, el número de reacciones con los protones depende del diámetro y sobre todo de la altura. Si el rango del protón es menor que la altura, el blanco es grueso. En la Tabla I figuran los rangos en cm para diversas energías de los protones, suponiendo que no hay absorción de los protones.

	0.4(GeV)	**0.8(GeV)**	**1.2(GeV)**	**1.8(GeV)**	**2.5(GeV)**
Pb	14	40	70	115	170
Hg	12	34	58	96	141
W	8	23	39	66	97

Tabla I. Rango en cm de los protones en diversos blancos de espalación

En adelante consideraremos un blanco grueso de Pb y protones de 1000 MeV de energía. En el plomo, Z = 82, A = 207 y N = A-Z =125 neutrones; de aquí: N/A = 0.6. En estas condiciones se puede calcular la energía media de enlace E_F de los nucleones en el plomo, utilizando el modelo colectivo y el nivel de Fermi[6]:

$$E_F = 21[1+\frac{5}{9}(\frac{N-Z}{A})^2] = 21.5\,\mathrm{MeV}$$

Suponiendo que el 80% de los 1000 MeV de los protones se use en la espalación, y que los neutrones espalados tengan 2 MeV de energía, el número medio de neutrones emitido por protón se estima en:

$$\bar{n} = \frac{0.8*0.6*1000}{21.5+2} = 20.4$$

Para estimar el máximo número de neutrones emitidos se usa la energía de enlace por nucléon. En el caso del plomo, a partir de la masa atómica del ^{206}Pb y del ^{207}Pb se obtiene que dicha energía es de 6.67 MeV. El número máximo de neutrones espalados resulta de considerar el suceso muy poco probable de que todos los choques del protón son con los neutrones de menor energía de enlace:

$$n_{max} = \frac{0.6*1000}{6.67+2} = 69$$

Si este suceso corresponde a $\bar{n}+3\sigma$, entonces la desviación típica estimada es (69-20.4)/3 = 16.2. Por otra parte, como $\bar{n}-3\sigma$ es negativo y no tiene sentido físico, la distribución de probabilidad del número de neutrones de espalación debe ser asimétrica (sesgada a la derecha).

ECUACION DE FOKKER-PLANCK

Caractericemos la espalación por la probabilidad f(n) de que un protón arranque n neutrones del blanco. Si N es el número de neutrones en el sistema en el instante t, la ecuación del balance de probabilidades de Kolmogorov[(4)] es:

$$P(n, t+\Delta t) = S_p \Delta t \sum_{n=1}^{\infty} P(N-n, t) p(n) + P(N, t)(1 - S_p \Delta t);$$

donde S_p es la intensidad de la fuente de protones. Para $\Delta t << 1/S_p$, el balance es:

$$\frac{dP}{dt} = S_p \sum_{n=1}^{\infty} P(N-n, t) p(n) - P(N, t);$$

Definiendo la función generatriz de momentos como:

$$F(x, t) = \sum_{N=1}^{\infty} x^N P(N, t);$$

se obtiene la ecuación de Fokker-Planck para este caso:

$$\frac{\partial F}{\partial t} = S_p [f(x) - 1] F \quad ; \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n p(n)$$

La solución de la ecuación es inmediata, tal como puede comprobarse por sustitución:

$$F(x, t) = \exp\{S_p t [f(x) - 1]\};$$

A partir de $f(1) = 1; f'(1) = \bar{n}; f''(1) = < n(n-1) >$, se demuestra fácilmente que particularizando F en el punto (1,t) resulta:

$$\bar{N} = \frac{\partial F}{\partial x}; \quad \sigma^2 = \frac{\partial F}{\partial x}\left(1 - \frac{\partial F}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2};$$

Escribiendo las ecuaciones anteriores en términos de las magnitudes de la espalación:

$$\bar{N} = S_p t \bar{n} \quad ; \quad \sigma^2 = S_p t \bar{n}(1 - S_p t \bar{n}) + S_p t [< n(n-1) > + S_p t \bar{n}^2]$$

Con algo de álgebra, el resultado final para la relación media varianza es:

$$\frac{\sigma^2}{\bar{N}} = 1 + D_n \bar{n} \quad ; \quad D_n = \frac{< n(n-1) >}{\bar{n}^2}$$

La relación media/varianza se ha expresado usando el factor de Diven[4], D_n, para hacer manifiesta la diferencia con el proceso de Poisson, en donde el factor de Diven es nulo; para el caso de la espalación, el factor de Diven está próximo a la unidad. Para multiplicidades del orden de 20, la relación media/varianza es del orden de la multiplicidad. Más concretamente, si M es la medida (adimensional) de un contador de neutrones, en primera aproximación, las desviaciones típicas de la medida figuran en la tabla II

Proceso	Cuentas de un detector	Desviación típica
Poisson	M	$\sqrt{M}$
Espalación	M	$\sqrt{M\bar{n}}$

Tabla II. Diferencias entre las desviaciones típicas de los procesos.

Para una multiplicidad del orden de 25, la desviación típica de un proceso de espalación es cinco veces mayor que la correspondiente a un proceso de Poisson.

DISCUSION

La desviación de un proceso de Poisson se ha obtenido de la función generatriz de momentos, sin conocer la función de distribución de probabilidad del número de neutrones generados por un protón de alta energía. Es preciso tener un conocimiento del valor medio y del factor de Diven de esta distribución.

El valor medio puede calcularse a partir de correlaciones empíricas[7], válidas para blanco grueso:

$$\bar{n} = C_M (E_p - 0.12) \quad , E_p > 0.12\,\mathrm{GeV};$$

donde la E_p se mide en GeV, y C_M es un coeficiente que depende de material del blanco. Ver Tabla III

Material	C_M (GeV^{-1})
Plomo	22.7
Uranio	36.7

Tabla III; Coeficientes C_M para dos blancos gruesos.

Otra expresión aproximada, usable para otros blancos gruesos tales como el W y el La:

$$\bar{n} = 0.1(E_p - 0.12)(A + 20), \; E_p > 0.12\,\mathrm{GeV}$$

El otro término a considerar en la desviación frente al proceso de Poisson, es el factor de Diven. Sea cual sea p(n):

$$D_n = \frac{< n(n-1) >}{\bar{n}^2} = \frac{\bar{n}^2 + \sigma^2 - \bar{n}}{\bar{n}^2};$$

Para la estima de la varianza en la expresión anterior se necesita p(n). Sin embargo, según la estima del valor medio y la varianza dados por los razonamientos básicos de la Física Nuclear, el factor de Diven estará próximo a la unidad.

Hay dos procesos estocásticos en la espalación. El neutrón podría ser espalado por el protón incidente tras uno a varios choques. Este proceso correspondería a una estadística de Poisson; pero también podría ocurrir que el neutrón sea espalado por protones secundarios que han recibido energía del protón incidente. En este caso, la estadística de Gauss sería más adecuada. Las medidas reflejan que p(n) es una combinación de ambos procesos, siendo el de Gauss dominante para blanco grueso.

Para el caso del plomo, nuestra estima inicial del número máximo de neutrones espalados era de 69, mientras que las medidas lo reducen a 50. En estas condiciones, la desviación típica sería: $\sigma = (50-20.4)/3 \approx 10$. De aquí se estima que $D_n = 1.19$.

La fuente de protones es pulsada, aunque se puede considerar continua a altas frecuencias; pero debe ser corregida por el tiempo que está operativa dentro del pulso. Por otro lado, las fluctuaciones de la corriente del acelerador –fluctuaciones de la fuente de protones- también debieran considerarse al estimar las incertidumbres. Si el tiempo de medida de los neutrones es mucho mayor que la inversa de la frecuencia de la corriente del acelerador, entonces la fuente puede considerarse constante.

El espectro energético de los neutrones de espalación es de ‘evaporación’, en torno a los 2-5 MeV. Los neutrones espalados directamente por el protón incidente tendrían energías muy superiores, por lo que probablemente no serían detectados. En este caso, el proceso de Poisson pierde importancia frente al de Gauss. Modelizar p(n) con una función de distribución normal significa que todos los neutrones provienen de neutrones secundarios. Las medidas demuestran que para blancos gruesos es una buena aproximación.

CONCLUSIONES

Para protones de 1000 MeV y blanco grueso de espalación, los neutrones espalados no siguen la estadística de Poisson a causa de la multiplicidad de neutrones producidos por cada protón.

La función generatriz de momentos, obtenida resolviendo la ecuación de Fokker-Planck, demuestra la aseveración anterior. La relación varianza/media es mucho mayor que la unidad. Sin embargo, para calcular esta relación se necesita la estima del factor de Diven y del cálculo medio de neutrones espalados por cada protón.

Correlaciones empíricas suministran el valor del número medio de neutrones espalados, pero el factor de Diven debe estimarse indirectamente por modelos nucleares sencillos. Afortunadamente, el factor de Diven está próximo a la unidad y la función generatriz de momentos proporciona una primera aproximación a la varianza.

Para blancos gruesos, la distribución gaussiana para la probabilidad de los neutrones espalados resulta una buena aproximación, especialmente si se considera que los neutrones de muy alta energía no serían detectados.

REFERENCIAS

1. Profio E. (1976), “*Experimental Reactor Physics*”, John Willey and Sons
2. Takahashi H. (2000),“*The role of accelerator in energy; recent development in ADS*”, Progress in Nucl. Energy, Vol. 7, No. 1-4, pp.363-369
3. Walpole R. and Mayers R.M. (1978),“*Probability and statistics for engineers and scientists*”, Macmillan Publishing Co.
4. Williams M.M.R. (1974),”*Random process in nuclear reactors*”, Pergamon Press Ltd.
5. Letourneau A. et al. (2000), “*Neutron production in bombardments of thin and thick W, Hg, Pb targets by 0.4, 0.8, 1.2 , 1.8 and 2.5 GeV protons*”, Nucl.Inst.&Meth B, Vol.170, pp. 299-322
6. Greiner W, Mahrum J. (1996),”*Nuclear Models*”, Springer Verlag
7. Zucker M.S. et al. (1998), ‘’*Spallation neutron production measurements*’’, Nucl. Sci.&Eng. Vol. 129, pp. 180-186